

MA10B-Analyse ¹

I.M.A.

Durée : 2 heures

Sans document - sans calculatrice.

I Soit $f : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur le segment $[0, 1]$ telle que $f(0) = 0$, $f(1) = 1$ et $f'(0) = f'(1) = 0$

Le but du problème est de démontrer que f admet un point fixe dans l'intervalle ouvert $]0, 1[$, c'est à dire qu'il existe $x_0 \in]0, 1[$ tel que $f(x_0) = x_0$

On désigne par g fonction de $]0, 1[$ dans $\mathbb{R}$, définie par : pour $x \in]0, 1[$, $g(x) = \frac{f(x)}{x} - \frac{f(x)-1}{x-1}$

1. Calculer $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x)$ et $\lim_{x \rightarrow 1^-} g(x)$
2. On prolonge g au segment $[0, 1]$ en posant $g(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} g(x)$ et $g(1) = \lim_{x \rightarrow 1^-} g(x)$. Montrer que g est continue sur $[0, 1]$.
3. En déduire, en utilisant un théorème que l'on énoncera, qu'il existe $\alpha \in]0, 1[$ tel que $\frac{f(\alpha)}{\alpha} = \frac{f(\alpha)-1}{\alpha-1}$
4. Montrer alors que $f(\alpha) = \alpha$

II Soient $(a_n)_{n \geq 0}$ et $(b_n)_{n \geq 0}$ deux suites réelles définies par :

$$a_0 = 1, a_1 = 0, a_{n+1} = (n+1)a_n + a_{n-1}$$

$$b_0 = 0, b_1 = 1, b_{n+1} = (n+1)b_n + b_{n-1}$$

pour tout $n \geq 1$.

On définit la suite $(w_n)_{n \geq 0}$ par : $w_n = a_n b_{n+1} - a_{n+1} b_n$ pour tout $n \geq 0$

1. Compléter le tableau :

n	0	1	2	3	4
a_n	1	0	-	-	-
b_n	0	1	-	-	-
w_n	-	-	-	-	-

- 2.a) Démontrer que pour tout $n \geq 1$, on a $w_n = -w_{n-1}$

- b) Exprimer w_n en fonction de n , $n \geq 0$

3. Donner la définition de deux suites adjacentes.

4. a) Montrer que $b_n > 0$ pour tout $n \geq 1$

- b) Montrer que $b_{n+1} \geq 2b_n$ pour tout $n \geq 1$

- c) En déduire que pour tout $n \geq 1$, on a $b_n \geq 2^{n-1}$.

- 5.a) Trouver $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n$.

- b) Montrer que la suite $(b_n)_{n \geq 0}$ est croissante.

6. a) Pour $n \geq 1$, exprimer $\frac{a_n}{b_n} - \frac{a_{n+1}}{b_{n+1}}$ en fonction de n , b_n et b_{n+1}

- b) En déduire que la suite $(\frac{a_{2n+1}}{b_{2n+1}})$ est croissante et que la suite $(\frac{a_{2n}}{b_{2n}})$ est décroissante.

7. Montrer que les suites $(\frac{a_{2n+1}}{b_{2n+1}})$ et $(\frac{a_{2n}}{b_{2n}})$ sont adjacentes.

8. Démontrer que la suite $(\frac{a_n}{b_n})$ est convergente.

¹ TELECHARGER SUR [http : \www.examens.fr.st](http://www.examens.fr.st)