UNIVERSITE CATHOLIQUE DE L'OUEST
JURY D'ETAT
Académie de Nantes

1ère session : Juin 1997
Deug SCIENCES mentions :
MASS et MIAS 1ère année

MA1B -ALGEBRE [1]

Durée : 2 heures
sans document, sans calculatrice

A

On considère dans $\mathbb{R}[X]$ les polynômes suivants :
$P = X^4 - 6X^3 + 5X^2 + 24X - 36$
$Q = X^3 - 9X^2 + 26X - 24$
1- Calculer le PGCD de P et Q.
2- En déduire la décomposition de P et Q en facteurs premiers de $\mathbb{R}[X]$.

B

On considère dans $\mathbb{R}[X]$ un polynôme P de degré supérieur ou égal à 2.
1- Déterminer en fonction de $P(a)$ et $P(a')$ le reste de la division euclidienne de P par $(X-a)^2$.
2- Déterminer, pour $a \neq b$, en fonction de $P(a)$ et $P(b)$, le reste de la division de P par $(X-a)(X-b)$.
3- Donner la formule générale des polynômes A tels que $A(a) = P(a)$ et $A(b) = P(b)$.

C

On considère $K = \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ corps des entiers modulo 5 et $M_2(K)$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre 2 à coefficients dans K.
$K = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}\}$
1-a- Donner les tables de l'addition et de la multiplication dans K.
b- Quel est le nombre d'éléments de $M_2(K)$?
c- Décrire brièvement la structure de $M_2(K)$.

2- On considère les matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} \bar{1} & \bar{1} \\ \bar{3} & \bar{4} \end{pmatrix} \text{ et } I = \begin{pmatrix} \bar{1} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{1} \end{pmatrix}$$

Calculer A^n pour $n \in \mathbb{N}$.

3-Soit F l'ensemble des matrices $M(a,b)$ qui s'écrivent

$$M(a,b) = aI + bA$$

où a et b sont éléments de K.
a- Montrer que F est un sous-anneau commutatif de $M_2(K)$.
b- Trouver les matrices $M(a,b)$ de F telles que $(M(a,b))^2 = M(a,b)$.
c- L'anneau F est-il intègre ? est-il un corps ? (on pourra utiliser le résultat de la question précédente afin d'éviter les calculs.)

4- Déterminer G des matrices de $M_2(K)$ qui commutent avec les matrices de F. (c'est à dire les matrices M telles que $MX = XM$ pour tout X dans F). Comparer F et G