UNIVERSITE CATHOLIQUE DE L'OUEST — JURY D'ETAT — Académie de Nantes

1ère SESSION : Juin 1998 — Deug SCIENCES mentions : MASS et MIAS 1ère année

MA1B-ALGEBRE [1]

Durée : 2 heures
Sans document ni calculatrice
Commentaire : Les parties A et B sont indépendantes.

A

Soit E l'ensemble des matrices carrées d'ordre 2, à termes entiers relatifs, de déterminant égal à 1.
1- Montrer que E est stable pour le produit matriciel.
Soit $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ un élément de E. Calculer M^{-1}.
En déduire la structure algébrique de E muni du produit matriciel.
2- Donner une condition nécessaire et suffisante sur le couple (a, b) pour que la matrice $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ appartienne à E
Trouver toutes les matrices de E de la forme $M = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ x & y \end{pmatrix}$
3- Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Calculer A^{-1}, A^2, A^3. Conjecturer A^n, et vérifier par récurrence pour $n \in \mathbb{N}$.
4- Calculer la matrice $(A - I)^2$ où I est la matrice unité.
Calculer le polynôme R_n reste de la division de X^n par $(X - 1)^2$.
Retrouver la valeur de A^n.
5- A toute matrice $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ de E, on associe la fonction f_M définie dans $\mathbb{Q}$ par :

$$f_M(t) = \frac{at + b}{ct + d}$$

Comparer les fonctions $f_M \circ f'_M$, et $f_{MM'}$
6- Etude d'une suite récurrente, u, définie par : $u_0 \in \mathbb{Q}$ et $U_{n+1} = f_A(u_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ (La matrice A est celle définie en 3.)
Montrer que $u_n = f_{A^n}(u_0)$ et expliciter u_n
En déduire que si $u_n = f^{-1}_{A^n}(O)$ alors la suite est finie et que sinon sa limite est 1.

B

Soit

$$A_m = \begin{pmatrix} m & m^2 & m^3 \\ m^2 & m^4 & m^6 \\ m^3 & m^6 & m^9 \end{pmatrix}$$

où m est élément de $\mathbb{C}$.

1- Calculer le déterminant de A_m (On fera apparaître les étapes du calcul).
Pour quelles valeurs de m la matrice A_m est-elle inversible ?

2- Soit j la racine cubique de 1 égale à $\frac{-1+i\sqrt{3}}{2} = e^{i\frac{2\pi}{3}}$
Montrer que le systéme suivant, où z_1, z_2 et z_3 sont éléments de $\mathbb{C}$, a une solution unique.

$$\begin{cases} jz_1 + j^2 z_2 + z_3 = 3 \\ j^2 z_1 + jz_2 + z_3 = 0 \\ z_1 + z_2 + z_3 = 0 \end{cases}$$

3- Quelle est cette solution ?