UNIVERSITE de SAVOIE

Année 1997-98
Maitrise MMP

EXAMEN D'ALGEBRE et GEOMETRIE
mercredi 6 mai de 9h à 12h

I Dans cet exercice A designe un anneau principal et si M est un A-module on pose $AnnM = \{a \in A/(\forall x \in M)(ax = 0)\}$.
1) Soit a un élément de A, alors $M = A/(a)$ est un A-module de torsion, démontrer que $AnnM = (a)$.(pour l'une des inclusions, remarquer que A est unitaire).
2) Plus généralement soit M un A-module de torsion et :

$$M = A/(a_1) \oplus A/(a_2) \oplus \cdots \oplus A/(a_n) \quad \text{avec} \quad a_1|a_2|\cdots|a_n$$

Soit b tel que $AnnM = (b)$, démontrer que $(b) = (a_n)$.
3) Soient V un espace vectoriel de dimension finie sur un corps K algébriquement clos, et u un endomorphisme de V. On muni V d'une structure de $K[X]$-module en posant : $P.x = (P(u))(x)$. Démontrer qu'il existe n polynômes $P_1, P_2, \cdots, P_n$ tels que :

$$V = K[X]/(P_1) \oplus K[X]/(P_2) \oplus \cdots \oplus K[X]/(P_n) \quad \text{avec} \quad P_1|P_2|\cdots|P_n$$

Soit m un polynôme unitaire tel que $AnnV = (m)$ (le polynôme m s'appelle le polynôme minimal de u). On a donc d'après b) $(m) = (P_n)$.
Démontrer que si λ est une racine de m alors λ est une valeur propre de u.
Réciproquement, montrer que si λ est une valeur propre de u alors λ est une racine de m. (On pourra montrer que $X - \lambda$ divise m).

II Soient p un nombre premier impair, ω une racine p-ième de l'unité différente de 1 et $k = \mathbb{Q}(\omega)$.
1) Soit c un élément de k qui n'est pas un carré dans k, et soit $K = k(\sqrt{c})$. Montrer que $H = Gal(K/k)$ a deux éléments; on note γ le k-automorphisme de K qui est différent de l'identité.
2) Soient a un élément de K tel que le polynôme $X^p - a$ soit irréductible sur$K$, L le corps de rupture de de $X^p - a$ et $G = Gal(L/k)$.
  a) Montrer qu'il existe α dans L tel que $L = K(\alpha)$.
  b) Soit $\sigma \in G$, montrer que $\sigma(K) = K$ et que $\sigma(a)$ possède une racine p-ième dans L.
  c) Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes :
    (i) $(\exists \beta \in L)(\gamma(a) = \beta^p)$
    (ii) L est une extension normale de k.
Dans la suite on suppose ces conditions vérifiées.
  d) Démontrer que G est un groupe d'ordre $2p$.
3) Soient σ_1 et τ les k- automorphismes de L définis par $\sigma_1(\sqrt{c}) = \sqrt{c}, \sigma_1(\alpha) = \omega\alpha$ et $\tau(\sqrt{c}) = -\sqrt{c}, \tau(\alpha) = \beta$.
  a) Montrer que σ_1 est un élément d'ordre p.
  b) Montrer qu'il existe un entier i tel que $0 \leq i \leq p-1$ et $\tau(\beta) = \omega^i\alpha$.

Montrer que si $i \neq 0$, G est isomorphe à $\mathbb{Z}/2p\mathbb{Z}$.

c) On suppose que $\tau^2 = Id$. Montrer qu'il existe un entier j tel que $0 \leq j \leq p-1$ et $\sigma_1(\beta) = \omega^j \beta$. Montrer que G est engendré par τ et σ_1 et que G est commutatif si et seulement si $j = 1$.

4) Montrer que si $a \in k$, G est isomorphe à $\mathbb{Z}/2p\mathbb{Z}$.

5) (Question hors barême) Soient $p = 3, c = 2, a = 1 + \sqrt{2}$ Montrer que L est une extension normale de k et que $Gal(L/k)$ n'est pas commutatif.