UNIVERSITE de SAVOIE

Année 1998-99
Maitrise MMP

EXAMEN D'ALGEBRE et GEOMETRIE
samedi 12 juin de 9h à 12h

I On dit qu'un groupe est indécomposable s'il n'est pas isomorphe à un produit direct de groupes.
Démontrer qu'un groupe fini, commutatif et indécomposable est un p-groupe cyclique.

II Soient K un corps commutatif et G un sous-groupe fini, à n éléments, du groupe des automorphismes de K; On note k le corps fixe de G, on a donc $k = \{x \in K/(\forall \sigma \in G)(\sigma(x) = x)\}$.

A On va montrer que K est une extension séparable de k.
Soit α un élément quelconque de K, on considère l'ensemble des parties $\{\sigma_1, \sigma_2, \cdots, \sigma_p\}$ de G telles que tous les $\sigma_i(\alpha)$ $(1 \leq i \leq p)$ soient distincts, et on note A une telle partie maximale pour l'inclusion ; on pose $A = \{\sigma_1, \sigma_2, \cdots, \sigma_r\}$.
a) Montrer qu'il existe $j \in \{1, 2, \cdots, r\}$ tel que : $\sigma_j(\alpha) = \alpha$.
b) On considère le polynôme :

$$f(X) = \prod_{i=1}^{r} \Big(X - \sigma_i(\alpha) \Big)$$

On va montrer que $f \in k[X]$.
1) Soit $\tau \in G$, démontrer que τ induit une bijection de $\{\sigma_1(\alpha), \sigma_2(\alpha), \cdots, \sigma_r(\alpha)\}$ sur lui-même (utiliser le fait que A est maximale).
2) En déduire que τ laisse fixe tous les coefficients de f et que $f \in k[X]$.
3) Montrer que α est séparable sur k et que $[k(\alpha) : k] \leq n$.

B On va montrer que $[K : k] \leq n$. Soit $\alpha \in K$ tel que $[k(\alpha) : k]$ soit maximal.
1) Supposons $k(\alpha) \neq K$, alors il existe $\beta \in K - k(\alpha)$. Démontrer qu'il existe $\gamma \in K$ tel que : $k(\gamma) = k(\alpha, \beta)$, en déduire une contradiction.
2) Démontrer que : $[K : k] \leq n$.

C D'après B, il existe $\alpha \in K$ tel que $K = k(\alpha)$. Montrer que K est le corps de rupture d'un polynôme séparable (utiliser A), on en déduit alors que (c.f. cours) :

$$Card(\mathcal{G}al(K/k) = [K : k].$$

Démontrer que que $[K : k] = n$.