UNIVERSITE de SAVOIE

Année 1998-99
Maitrise MMP

**EXAMEN D'ALGEBRE et GEOMETRIE**
**mercredi 8 septembre de 9h à 12h**

**I** a) Soient $n$ un entier non nul, $a_1, a_2, \cdots, a_n$ des entiers non nuls et $m$ un entier qui divise le produit $a_1 a_2 \cdots a_n$. Démontrer que $m$ peut s'écrire : $m = b_1 b_2 \cdots b_n$ où $b_i$ divise $a_i$ pour $i : 1, 2, \cdots, n$.
b) Soit $G$ un groupe commutatif fini d'ordre $k$ et $m$ un entier qui divise $k$, Démontrer que $G$ possède un sous-groupe d'ordre $m$.

**II** Soit $f$ le polynôme de $\mathbb{Q}[X]$ défini par :$f(X) = X^3 - 3X + 1$.
a) Démontrer que $f$ est irréductible sur $\mathbb{Q}$.
b) Soit $\theta$ une racine de $f$. Démontrer que $\theta^2 - 2$ est une racine de $f$. En déduire les trois racines de $f$.
c) Démontrer que $\mathbb{Q}(\theta)$ est un extension normale et séparable de $\mathbb{Q}$.
d) Déterminer $\mathcal{G}al(\mathbb{Q}(\theta)/\mathbb{Q})$.
e) Soit $\beta = \dfrac{1}{\theta^2 + \theta - 2}$. Calculer $\beta$ dans la base $\{1, \theta, \theta^2\}$ de $\mathbb{Q}(\theta)$ et le polynôme minimal de $\beta$.