UNIVERSITE de SAVOIE

Année 1997-98
Maitrise MMP

EXAMEN D'ALGEBRE et GEOMETRIE
jeudi 10 septembre de 9h à 10h 30

I-A Soit G un groupe commutatif fini noté additivement, on sait qu'il existe des entiers $a_1, a_2, \cdots, a_n$ tels que : $a_1 \mid a_2 \mid \cdots \mid a_n$ et

$$G \simeq \mathbb{Z}/a_1\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/a_2\mathbb{Z} \times \cdots \times \mathbb{Z}/a_n\mathbb{Z}$$

1) Démontrer que a_n est le P.P.C.M. des ordres des éléments de G.
2) Démontrer qu'il existe $x \in G$ d'ordre a_n.
B Soit G un sous-groupe fini du groupe multiplicatif K^* d'un corps commutatif K.
1) Démontrer qu'il existe $x \in G$ et un entier n tels que x soit d'ordre n et $(\forall y \in G) \quad y^n = 1$.
2) Démontrer que G admet au plus n éléments (on pourra considérer le polynôme
$X^n - 1$ de $K[X]$).
3) Démontrer que G est cyclique.

II On note k le corps $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$, et on considère le polynôme $P(X) = X^3 + X^2 + X + 1$ de $k[X]$.
1) P est-il irréductible sur k.
2) Soit K le corps de rupture de P, quel est le degré de K sur k.
3) L'extension K de k est-elle normale? séparable?
4) Determiner $\mathcal{G}al(K : k)$.