UNIVERSITE de SAVOIE

Année 1999-00
Maitrise MMP

EXAMEN D'ALGEBRE et GEOMETRIE
lundi 5 juin de 9h à 12h

I Soient $p_1, p_2, \cdots, p_k$ des nombres premiers tous distincts, et G un groupe commutatif d'ordre $n = p_1 p_2 \cdots p_k$. Démontrer que G est cyclique.

II On considère le polynôme $P(X) = (X^2+1)(X^3-2)$ de $\mathbb{Q}[X]$. Soit K le corps de décomposition de P. Déterminer $\mathcal{G}al(K/\mathbb{Q})$.

III Soient K une extension finie de k et $\mathcal{G} = \mathcal{G}al(K/k)$, on appelle norme de x (pour $x \in K$) et on note :

$$N(x) = \prod_{\sigma \in \mathcal{G}} \sigma(x)$$

On suppose que $\mathcal{G}al(K/k)$ est cyclique d'ordre n et engendré par σ.
A Soit $a \in K^*$.

1) Démontrer que si $a = \dfrac{b}{\sigma(b)}$ où $b \in K^*$, alors $N(a) = 1$.

2) On suppose que $N(a) = 1$. Soit $c \in K$ on pose :
$d_0 = ac$; $d_1 = a\sigma(a)\sigma(c)$; $\cdots$; $d_i = a\sigma(a)\sigma^2(a)\cdots\sigma^i(a)\sigma^i(c)$; $\cdots$
et $b = d_0 + d_1 + \cdots + d_{n-1}$.

a) Démontrer que l'on peut choisir c pour avoir $b \neq 0$.

b) Montrer que : $a = \dfrac{b}{\sigma(b)}$.

B On suppose de plus que K est une extension normale et séparable de k, que k contient une racine primitive n-ième de l'unité ω et que la caractéristique p de k est première avec n.

1) Démontrer qu'il existe $\alpha \in K$ tel que : $\omega = \dfrac{\alpha}{\sigma(\alpha)}$.

2) Démontrer que $a = \alpha^n$ appartient à k (on montrera que a est laissé fixe par les éléments de $\mathcal{G}$).

3) Démontrer que $k(\alpha)$ est le corps de décomposition du polynôme $X^n - a$ et que $k(\alpha)$ est une extension normale et séparable de k. Montrer que les σ^i pour $i = 0, 1, \cdots, n-1$ sont des éléments distincts de $\mathcal{G}al(k(\alpha)/k)$. En déduire $K = k(\alpha)$ et que le polynôme $X^n - a$ est irréductible sur k.