Université d'Angers UFR Sciences
MAITRISE MATH. 2001-2002

U12 Probabilités et Statistiques
Examen du 19 juin 2002
Durée 3 heures
Calculatrices et documents non autorisés

Exercice I

1. Modéliser une suite $(X_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires à valeurs réelles, indépendantes et de même loi $\mathcal{N}(\mu, 1)$.

2. Soit $n = 100$, donner un estimateur sans biais de μ. Donner un intervalle de confiance de niveau $1 - \alpha = 0,95$ pour μ.

Exercice II

On considère une suite $(U_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires définies sur $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, à valeurs réelles, indépendantes et de même loi uniforme sur $[0, a]$ $(a > 0)$.
On définit une suite de variables aléatoires $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ par :

$$S_n = \sup_{k\leq n} U_k$$

1. Montrer que la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge $Pp.s.$ vers une variable aléatoire S à valeurs réelles.

2. Déterminer la fonction de répartition de S_n, cette fonction est notée F_n.
Etudier la convergence de la suite $(F_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$. Expliciter S.

3. Montrer que la loi de S_n admet une densité par rapport à la mesure de Lebesgue sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$. Justifier l'assertion :"*S_n est de carré intégrable*" et déterminer la moyenne et la variance de S_n.

4. Donner, en le justifiant, une suite d'estimateurs sans biais de a.

5. Soit δ fixé appartenant à $]0, 1[$.
Justifier l'assertion :

$$P([1 - \delta < \frac{S_n}{a} \leq 1]) \textit{ ne dépend pas de } a$$

Soit $\delta = 0,1$, déterminer n tel que :

$$P([1 - \delta < \frac{S_n}{a} \leq 1]) \geq 0,9$$

$\ln(10) = 2,302$, $\ln(9) = 2,197$.

Problème

p désigne un élément de $]0,1[$.

1. Soit $(\Delta_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires de Bernoulli de paramètre p définies sur un espace $(\Omega,\mathcal{F},P)$, soit $S_n = \sum_{k=1}^{n}\Delta_k$.
   Déterminer la moyenne et la variance de S_n.
   Pour s appartenant à $[0,1]$, expliciter $E(s^{S_n})$ (fonction génératrice de S_n).
   Donner la loi de S_n.

2. Modéliser une chaîne de Markov $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs dans $E=\mathbb{N}$, de loi initiale $P_0=\delta_1$ et de matrice de transition Π telle que :

$$\begin{array}{rcll} \Pi(0,j) & = & \delta_0(j) & \\ \Pi(i,j) & = & C_{2i}^{j}p^{j}(1-p)^{2i-j} & \text{si } i\in\mathbb{N}^* \text{ et } j\in\{0,\dots,2i\} \\ \Pi(i,j) & = & 0 & \text{si } i\in\mathbb{N}^* \text{ et } j\geq 2i+1 \end{array}$$

   On note $\mathcal{F}_n$ la tribu engendrée par les variables aléatoires $(Y_k)_{k=0,\dots,n}$.

3. Identifier $\Pi(1,.)$ donner sa fonction génératrice, cette fonction est notée φ.
   Notations à utiliser pour toute la suite : $m=2p$ et $\sigma^2=2p(1-p)$.

4. Pour i appartenant à E, expliciter, en utilisant m, σ^2 et φ, les quantités suivantes :

$$\begin{array}{rcl} m_i & = & \int_E x\Pi(i,dx) \\ \sigma_i^2 & = & \int_E (x-m_i)^2\Pi(i,dx) \\ \varphi_i(s) & = & \int_E s^x\Pi(i,dx) \end{array}$$

5. Montrer (facultatif) que : $P([Y_n>2^n])=0$.
   En déduire que Y_n est de carré intégrable.

6. Déterminer $E(Y_{n+1}/\mathcal{F}_n)$, en déduire, pour tout n, $E(Y_n)$.

7. On suppose m strictement plus petit que 1, montrer que la suite $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge $Pp.s$ vers 0.

Dans toute la suite on suppose m strictement plus grand que 1

8. Soit $W_n=m^{-n}Y_n$ (variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}_+$) montrer que $(W_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une martingale de carré intégrable relativement à la filtration $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

9. Montrer que :

$$E((W_{n+1}^2 - W_n^2)/\mathcal{F}_n) = E((W_{n+1} - W_n)^2/\mathcal{F}_n) = m^{-2(n+1)} Y_n \sigma^2$$

En déduire $E(W_n^2)$.

10. Montrer qu'il existe une variable aléatoire W à valeurs dans $\mathbb{R}_+$ telle que : la suite $(W_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge $Pp.s.$ et dans $L_2(\Omega, \mathcal{F}, P)$ vers W.

11. Soit s fixé appartenant à $[0, 1]$, montrer que $s^{Y_{n+1}}$ est borné et expliciter $E(s^{Y_{n+1}}/\mathcal{F}_n)$ à l'aide de φ.

12. On suppose que $p = \frac{2}{3}$, montrer que l'équation $\varphi(s) = s$ ($s \in]0, 1[$) a une solution unique notée q.
Soit $Z_n = q^{Y_n}$ montrer que $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une martingale relativement à la filtration $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et qu'il existe une variable aléatoire Z à valeurs dans $[0, 1]$ telle que : la suite $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge $Pp.s.$ et dans $L_2(\Omega, \mathcal{F}, P)$ vers Z.
En déduire que la suite $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge $Pp.s.$ vers une variable aléatoire Y à valeurs dans $\mathbb{N} \bigcup +\infty$.

13. Soit ϕ_n la fonction génératrice de Y_n. Montrer que $\phi_{n+1} = \phi_n \circ \varphi = \varphi \circ \phi_n$.
Pour $p = \frac{2}{3}$, montrer que la suite $(\phi_n(0))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers q.

14. Soit $D = [Y = 0] = \liminf_n [Y_n = 0]$, en admettant que $P(D) = \lim_n P([Y_n = 0])$, montrer que $P(D) = q$.

15. En utilisant $E(Z)$, les ensembles D et $C = [Y = +\infty]$, montrer que

$$P([0 < Y < +\infty]) = 0$$

. En déduire $P(C)$.