UNIVERSITE D'ANGERS
FACULTE DES SCIENCES

Examen maitrise : Algèbre 1, Janvier 2002 - Durée 3 heures [1]

Exercice 1 : [0,5],[1],[1],[1]

(a) Montrer que le polynôme $t^5 + 3t^2 + 6t + 15$ est irréductible sur $\mathbb{Q}$.

(b) Montrer que le polynôme $t^3 + 5t + 2$ est irréductible sur $\mathbb{Q}$.

(c) SOit $\mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{Q}[\alpha_1, \ldots, \alpha_n]$ une extension algébrique de $\mathbb{Q}$ telle que $\alpha_i^2 \in \mathbb{Q}$ pour $i = 1, \ldots, n$. Montrer $t^3 - 2$ est irréductible sur $\mathbb{Q}[\alpha_1, \ldots, \alpha_n]$.

(d) Soit $k \longrightarrow L \longrightarrow K$ des extensions algébriques de corps. Montrer que si K est une extension normale (resp séparable) de k ; alors L l'est aussi.

Exercice 2 : [1,5],[0,5],[0,5]

Soit k un corps et soit f un polynôme irréductible sur k de deg n. Soit K un corps de décomposition de f. Montrer que $\dim_k K \leq n!$. Donner pour tout $n > 0$ un exemple sans preuve, d'un corps k et d'un polynôme f tel que il y ait égalité. Qu'est ce que $\mathcal{G}al(K/k)$ lorsqu'il y a égalité ?

Exercice 3 : [2],[2]

Soit $k \longrightarrow K$ une extension de corps.

(a) Soient $g_1, \ldots, g_n$ des automorphisme du corps K deux à deux distincts. Montrer que $g_1, \ldots, g_n$ sont linéairement indépendant sur K.

(b) On suppose que K est une extension finie de k. Montrer que $|\mathcal{G}al(K/k)| \leq \dim_k K$

Exercice 4 : [2],[3]

Soit k un corps de cardinal fini et de caractéristique $p > 0$.

(a) Montrer que le cardinal de k est une de puissance p.

(b) Montrer que toute extension finie de k est une extension galoisienne.

Exercice 5 : [1],[0,5],[0,5],[1],[1],[1]

On considère l'extension $K = \mathbb{Q}[\sqrt{2}, ^3\sqrt{2}, j]$ de $\mathbb{Q}$, où j est une racine primitive troisième de l'unité. Soit $\mathcal{G}al(K/\mathbb{Q}) = G$

(a) Montrer que $t^3 - 2$ est irréductible sur $\mathbb{Q}[\sqrt{2}, j]$

(b) Calculer $\dim_{\mathbb{Q}} K$ et déduire $|G|$.

(c) Montrer que $H = \mathcal{G}al(K/\mathbb{Q}[\sqrt{2}])$ est un sous groupe normal de G.

(d) Montrer que $F = \mathcal{G}al(K/\mathbb{Q}[^3\sqrt{2}, j])$ est un sous groupe normal de G et que $F \cap H = (1)$.

(e) Montrer que $G = F \times H$

(f) Montrer que $H \simeq S_3$, où S_3 est le groupe symétrique d'ordre six.

[1] TELECHARGER SUR http :\\www.examens.fr.st