Maîtrise de Mathématiques - ANALYSE FONCTIONNELLE U2 [1]
EXAMEN TERMINAL le lundi 28/01/2002, 14h-17h

1. Considérons les espaces $L^1([0,1])$ et $L^\infty([0,1])$ par rapport à la mesure de Lebsgue sur $[0,1]$.
(i) Expliquer comment $L^1([0,1])$ se plonge isométriquement dans $(L^\infty([0,1]))^*$ (ne pas justifier).
(ii) Montrer que $L^1([0,1]) \neq (L^\infty([0,1]))^*$

2. Soit X un espace vectoriel normé et Y un sous-espace fermé de X de codimension 1, c'est à dire

$$X = Y \oplus \mathbb{C}z$$

pour un certain $z \notin Y$. Soit x^* une forme linéaire sur X définie par :

$$x^*(y + \lambda z) = \lambda, y \in Y, \lambda \in \mathbb{C}$$

Montrer que x^* est continue et déterminer $\|x^*\|$.

3. Soit $a = (a_k)$ une suite numérique fixée. Montrer que si la série $\sum_{k=1}^{\infty} a_k x_k$ converge pour toute suite $(x_k) \in l^p$ alors $a \in l^p$ ($\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1, p \in [0, \infty[$; si $p = 1$ on pose $q = \infty$).

4. Soit $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert et $\{x_n\}$ une suite d'élément de $\mathcal{H}$.
(i) Supposons que la suite x_n converge faiblement vers $x \in \mathcal{H}$ et que $\lim_n \|x_n\| = \|x\|$, montrer que $x_n \to x$ en norme.
(ii) Supposons que la suite x_n converge faiblement et que $\lim_n \|x_n\|$ existe. Peut-en on déduire que la quite x_n converge en norme ? Justifier la réponse.

5. Soit $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert et $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ un opérateur hermitien.
(i) Montrer que les valeurs propres de A sont réelles.
(ii) Montrer que les sous-espaces propres de A sont 2 à 2 orthogonaux.
(iii) Montrer que si $\mathcal{H}$ est séparable alors l'ensemble $\sigma_p(A)$ des valeurs propres de A est au plus dénombrable.
(iv) Que peut-on dire sur le cardinal de $\sigma_p(A)$ et de son adhérence $\overline{\sigma_p(A)}$ lorsque $\mathcal{H}$ est séparable de dimension infinie et A est hermitien compact sans valeur propre 0 ? Justifier la réponse.

6.Soit T l'opérateur défini par :

$$Tf(x) = \int_{[0,1]} min(x,y) f(y) dy$$

de $L^2([0,1])$ dans lui-même.
(i) Montrer que T est compact et hermitien.
(ii) Montrer que les valeurs propres de T différentes de 0 sont $\lambda_k = 1/(\pi^2(k+\frac{1}{2})^2), k \in \mathbb{N}$.
(*Indication.* Remarquer qu'un vecteur propre f associé à une valeur propre non nulle λ est de classe $\mathcal{C}^2$ et est solution de l'équation $\lambda f'' = -f$ avec les conditions au bord $f(0) = f'(1) = 0$)
(iii) Déterminer le spectre de T.
(iv) Déterminer $\|T\|$.