UNIVERSITÉ D'ANGERS
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques

2001/2002
Maîtrise de Mathématiques
U4

Examen du 29 Janvier 2002

Durée: 3h

Seul le formulaire est autorisé.

Question de cours. *(sur 4)*
Démontrer la formule de Gauss

$$(\Gamma^2_{12})_u - (\Gamma^2_{11})_v + \Gamma^1_{12}\Gamma^2_{11} + \Gamma^2_{12}\Gamma^2_{12} - \Gamma^2_{11}\Gamma^2_{22} - \Gamma^1_{11}\Gamma^2_{12} = -EK$$

Exercice. *(sur 4)*
Soient a une constante réelle strictement positive fixée et S l'hélicoïde droit d'équation $z = a\theta$ en coordonnées cylindriques.

Calculer la longueur de la courbe Γ située sur S et qui se projette orthogonalement sur la courbe d'équation polaire[1] $\rho^2 = a^2 \cos 2\theta$ dans le plan $z = 0$.

Problème. *(sur 12)*
Soient $O; x, y, z$ un repère orthonormé et Σ le conoïde droit d'axe Oz et de directrice la courbe d'équation paramétrique

$$x = u\,, \quad y = u^2\,, \quad z = u^3\,, \qquad u \in \mathbb{R}\,.$$

1) Montrer que Σ admet une équation cartésienne de la forme

$$x^3 z - y^3 = 0\,.$$

2) Déterminer $S \subset \Sigma$ tel que S soit une surface plongée dans $\mathbb{R}^3$.

3) Montrer qu'au point $M(x, y, z) \in S$ la courbure de Gauss est donnée par la formule[2]

$$K = \frac{-9\,x^2y^2z^2}{(x^2y^2 + 9(x^2+y^2)z^2)^2}\,.$$

4) Déterminer les deux familles de lignes asymptotiques de S.

5) Déterminer les lignes asymptotiques qui sont des géodésiques [3].

---

[1] Il est conseillé d'étudier l'allure de cette courbe plane classique, appelée lemniscate de Bernoulli.

[2] Il est conseillé de réfléchir au choix des coordonnées locales avant de se lancer dans les calculs.

[3] Il n'est pas nécessaire d'établir les équations différentielles des géodésiques.