Université d'Angers
Maîtrise de Mathématiques

Année 2001-2002

Unité 6-Algèbre commutative
Examen de Juin 2002

1. Soit K un corps commutatif.

   (a) Pour $Q \in K[Y_1, \dots, Y_n]$, montrer que $Q - Q(0, \dots, 0)$ appartient à l'idéal $(Y_1, \dots, Y_n)$ de $K[Y_1, \dots, Y_n]$ engendré par $Y_1, \dots, Y_n$.

   (b) Pour $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ des éléments de K et $P \in K[X_1, \dots, X_n]$, montrer que $P - P(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ appartient à l'idéal $\mathcal{M} = (X_1 - \lambda_1, \dots, X_n - \lambda_n)$.

   (c) Montrer que $\mathcal{M}$ est un idéal maximal de $K[X_1, \dots, X_n]$.

2. Soit A une K-algèbre (commutative unitaire) de type fini.

   (a) Pour $\varphi : A \to B$ un morphisme surjectif de K-algèbres, montrer que B est de type fini.

   (b) En déduire que B est la réunion d'une famille dénombrable de sous-K-espaces vectoriels de dimensions finies sur K puis que toute partie libre de B est au plus dénombrable.

   (c) Pour $\mathcal{M}$ un idéal maximal de A, montrer qu'il y a une injection canonique $j : K \to A/\mathcal{M} = L$.

   (d) Pour $\overline{a} \in L$ non algébrique sur K, montrer que l'application qui à $F \in K(X)$ associe $F(\overline{a})$ est bien définie et que c'est un isomorphisme de $K(X)$ sur le sous-corps de L engendré par $K \cup \{\overline{a}\}$.

   (e) Montrer que la famille $(\frac{1}{X-\lambda})_{\lambda \in K}$ d'éléments de $K(X)$ est libre.

   (f) En déduire si K est non dénombrable que L est une extension algébrique de K puis que $\dim_K L$ est finie.

   (g) Pour $A = \mathbb{C}[X_1, \dots, X_n]$, montrer que j est un isomorphisme et en déduire que tout idéal maximal de A est de la forme $(X_1 - \lambda_1, \dots, X_n - \lambda_n)$ avec $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{C}$.

3. Soit $\mathcal{M}$ un idéal maximal de $A = \mathbb{R}[X_1, \dots, X_n]$.

   (a) Avec L désignant toujours $A/\mathcal{M}$, montrer que $\dim_{\mathbb{R}} L = 1$ ou 2.
   On supposera désormais $\dim_{\mathbb{R}} L = 2$.

   (b) Montrer qu'il existe j entre 1 et n tel que $\overline{X}_j \notin \mathbb{R}$.

   (c) Montrer l'existence de coefficients réels $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ et $\beta_1, \dots, \beta_n$ tels que pour $k \neq j$, $X_k - \alpha_k X_j - \beta_k \in \mathcal{M}$ et $X_j^2 - \alpha_j X_j - \beta_j \in \mathcal{M}$.

   (d) Montrer que $X_j^2 - \alpha_j X_j - \beta_j$ est irréductible.

   (e) Soit $\mathcal{P}$ l'idéal de A engendré par les $X_k - \alpha_k X_j - \beta_k$ pour $k \neq j$ et $X_j^2 - \alpha_j X_j - \beta_j$. Exprimer $A/\mathcal{P}$ et conclure que $\mathcal{P} = \mathcal{M}$.

4. Soit A une $\mathbb{C}$-algèbre intègre de type fini.

(a) Pour $a \in A$ non nul, on note A' la sous-algèbre du corps des fractions de A engendrée par $A \cup \{\frac{1}{a}\}$.
Montrer que A' est de type fini.

(b) Pour $\mathcal{M}'$ un idéal maximal de A', montrer que $\mathcal{M} = \mathcal{M}' \cap A$ est un idéal maximal de A ne contenant pas a.

(c) Montrer que l'intersection des idéaux maximaux de A est réduite à $\{0\}$.

(d) On ne suppose plus A intègre.
Montrer que tout idéal premier de A est intersection d'idéaux maximaux de A.