MAITRISE - DISTRIBUTIONS

2002 - 2ième semestre

EXAMEN Terminal le 17 juin, 2002

durée 3 h [1]

Exercice 1 :

Soit δ_a la mesure de Dirac au point $a \in \mathbb{R}$

a) Calculer le produit de convolution

$$\delta_x * \delta_y, x, y \in \mathbb{R}$$

b) Calculer la transformée de Fourier de δ_x.

c) On définit par récurrence la suite de distributions $(T_k), k \in \mathbb{N}$

$$T_1 = \frac{1}{2}(\delta_1 + \delta_{-1}); T_k = T_{k-1} * T_1, \forall k \geq 2$$

Exprimer T_k en combinaison linéaire de mesures de Dirac $\delta_k, k \in \mathbb{Z}$

d) Calculer la transformée de Fourier de T_k.

e) On pose $f_k(t) = \mathcal{F}T_k(\frac{t}{\sqrt{k}})$.

Calculer $\lim_{k\to\infty} \log f_k(t)$. En déduire $\lim_{k\to\infty} f_k(t)$.

Exercice 2 :

Montrer que

$$T = \sum_{k=0}^{\infty} e^k \delta_k$$

définie une distribution sur $\mathbb{R}^+$ qui possède une transformé de Laplace que l'on calculera. Préciser son domaine de définition.

Exercice 3 :

a) Calculer la transformé de Laplace et préciser son domaine de définition pour les distributions suivantes :

$$(i)\delta, \quad (ii)\delta', \quad (iii)\sin x Y(x), \quad (iv) x e^x Y(x)$$

où $Y(x)$ est la fonction d'Heavside sur $\mathbb{R}$.

b) Trouver une distribution T possédant une transformée de Laplace et vérifiant :

$$(x e^x Y(x)) * T = \sin x Y(x)$$

Exercice 4 :

a) Donner une définition de distribution harmonique sur un ouvert de $\mathbb{R}^l, l \geq 2$.

b) Soient $x_1, \ldots, x_l$ les fonctions coordonnées de $\mathbb{R}^l$ et $r = (\sum_{i=1}^{l} x_i^2)^{\frac{1}{2}}$. Trouver toutes les fonctions $f(r)$ définissant distributions harmoniques sur $\mathbb{R}^l$