UNIVERSITE D'ANGERS
ENSEMBLE SCIENTIFIQUE

Maîtrise de Mathématiques

Analyse numérique
examen du mardi 19-06-2002

I Question de cours avec prolongation.

1) Enoncer une condition nécessaire et suffisante, pour qu'une matrice inversible de taille (n, n), admette une factorisation $A = L^T U$, où L et U sont des matrices triangulaires supérieures, L étant à diagonale unité (et L^T sa transposée!). Montrer qu'alors cette décomposition est unique.
2) En déduire que, sous les même circonstances, on obtient une décomposition unique $A = L^T DR$ avec L et R des matrices triangulaires supérieures à diagonale unité, et D une matrice diagonale $diag(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$.
3) Si A est en plus symétrique, vérifier que $L = R$, et que:

$$X^T AX = \sum \lambda_i y_i^2$$

où $Y = LX$ est le vecteur colonne de coordonnées y_i. Que reconnaît on pour la forme quadratique de matrice A? Décrire sommairement un algorithme de calcul de L et de D.

II

On considère la méthode de Runge-Kutta, pour l'équation différentielle $y' = f(x, y)$, définie par le tableau suivant :

$$\begin{array}{c|ccc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/4 & 1/4 & 0 & 0 \\ 3/4 & -9/20 & 6/5 & 0 \\ \hline 1 & 1/9 & 1/3 & 5/9 \end{array}$$

1) Ecrire explicitement le schéma obtenu sous la forme :

$$y_{n+1} = y_n + h_n \Phi(t_n, y_n, h_n)$$

On exprimera la fonction $\Phi(t, y, h)$, en utilisant au maximum, les intermédiaires $p_{n,i} = p_i(t_n, y_n, h_n)$ successivement définis.
2) Montrer que la méthode est consistante, et qu'elle est stable, dès que f est k-Lipschitzienne. On explicitera un majorant de la constante de stabilité en fonction de k.
3)Vérifier que la méthode proposée est d'ordre au moins trois. On rappelle, au verso de cette feuille, deux formules démontrées en TD qu'on utilisera pour cela.
4) On se place dans le cas particulier suivant : $f(t, y) = t + y + 1$
i) Calculer pour tout n, la fonction $f^{[n]}(t, y)$ dans ce cas particulier.
ii) Calculer la fonction Φ correspondante, en mettant en évidence son développement en h. Calculer les $\frac{\partial^2 \Phi}{\partial h^2}(t, y, 0)$ ainsi obtenus.
4) En rapprochant l'ensemble des résultats obtenus trouver l'ordre de la méthode étudiée dans cet exercice?

annexe

$$\frac{\partial \Phi}{\partial h}(t,y,0) = (\sum b_j c_j) f^{[1]}(t,y)$$

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial h^2}(t,y,0) = (\sum b_j c_j^2) f^{[2]}(t,y) + \left[(2\sum_{i,j} b_i a_{i,j} c_j) - (\sum b_j c_j^2)\right] (\frac{\partial f}{\partial y}(t,y) f^{[1]}(t,y)).$$